



TITLE:

級数を扱う授業におけるKETpicで作成した挿図教材の使用 (数式処理と教育: 数学教育における数式処理システムの効果的利用に関する研究)

AUTHOR(S):

北原, 清志; 高遠, 節夫

CITATION:

北原, 清志 ...[et al]. 級数を扱う授業におけるKETpicで作成した挿図教材の使用 (数式処理と教育: 数学教育における数式処理システムの効果的利用に関する研究). 数理解析研究所講究録 2009, 1624: 90-105

ISSUE DATE:

2009-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140268>

RIGHT:

級数を扱う授業における KETpic で作成した挿図教材の使用

工学院大学・工学部 北原 清志 (Kiyoshi Kitahara)
Faculty of Engineering,
Kogakuin University
東邦大学・薬学部 高遠 節夫 (Setsuo Takato)
Faculty of Pharmaceutical Sciences,
Toho University

1 はじめに

本研究は KETpic を用いて作成した挿図教材の大学数学教育における教育的な意味を、数式処理ソフト（以下、CAS という）との関連において考察するものである。

KETpic とは $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 文書中に図を挿入するための CAS のマクロパッケージである。単色線画を基本とした描画機能を持ち、非常に精度の高い出力が可能である。従って、授業等で利用するために大量に印刷して配布する教材作成に向いている。KETpic の図形描画における表現力は、CAS の機能を使いこなすことで実現されているのであるが、CAS を使うことはユーザー側にとっても大きな意味をもち、十分に説得力のある挿図教材を作成する可能性を広げてくれる。

今回提示する教材例は、フーリエ級数とテイラー級数に関するものである。

フーリエ級数に関する教材例では、全体図とともに拡大した部分区間の図を表示して、近似の様子が場所によって異なること、近似精度を十分高くしても拡大してみると振動状態が見られることなどを示して、フーリエ級数による近似の性質をより深く理解できる教材作成を目指した。部分区間における 2 乗近似誤差を CAS を用いて計算し、ギブス現象の特徴を図とともに数値的な面からも示すことができた。

テイラー級数に関する教材例では、近似の特徴を段階に分けて、次第に深くなる階層をたどるという形で提示する。テイラー近似では近似多項式の次数を上げることに応じて、近似可能範囲の拡大・近似精度の向上・収束半径の問題等の特徴が現れてくるが、これらの特徴をそれぞれ適切な図を用いて表現することによって、理解を容易にし概念の定着を確実にすることができる。

2 フーリエ級数に関する教材作成例

2.1 作成教材について

第2章では，KETpicによる作図の以下に述べる3つの特徴を用いて，フーリエ近似の様子を視覚的かつ動的にとらえる一つの方法を提示する．

1. 拡大縮小を自由にかつ正確に行うことができる．
2. 部分的に少しずつ異なる図を簡単に描くことができる．
3. CASを利用しているので，和で表わされた関数の値や数値積分の結果を容易に取り入れることができる．

本章では，周期 2π の周期関数 $f(x)$ として

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

について考察する．その項数 n のフーリエ近似は

$$s_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x$$

である．フーリエ近似 $s_n(x)$ に対して，区間 $\alpha < x < \beta$ における2乗近似誤差 $E(n, [\alpha, \beta])$ を次式で定める．

$$E(n, [\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} |s_n(x) - f(x)|^2 dx$$

$E(n, [-\pi, \pi])$ は一周期区間における2乗近似誤差（普通の意味での2乗近似誤差）である．ここではギブス現象が現れる場合を扱うが，次に述べる比率を計算することにより，ギブス現象のもつ一つの特徴を数値的に明らかにすることができる．その比率とは，部分区間 $\alpha < x < \beta$ における2乗近似誤差の一周期区間における2乗近似誤差に対する比率であり，次式によって定める．

$$R(n, [\alpha, \beta]) = \frac{E(n, [\alpha, \beta])}{E(n, [-\pi, \pi])}$$

上式によって定義された比率 $R(n, [\alpha, \beta])$ は，区間の関数として加法性を持つことに注意する．すなわち， I_1, I_2 を2つの互いに交わらない区間とするとき次式が成り立つ．

$$R(n, I_1 \cup I_2) = R(n, I_1) + R(n, I_2) \quad (I_1 \cap I_2 = \emptyset)$$

加法性により，異なる区間における近似誤差の比率を比較することに十分意味があると考えられる．

2.2 項数は一定で着目範囲を変化させる場合

第2.2節では、近似の項数を $n = 30$ に固定して着目範囲を変化させる場合を扱う。

具体的には小区間 $0 < x < 0.5$ から出発して、0.25 ずつ正方向に移動させた部分区間における近似の様子を観察する。全体図の中に部分区間に対応する矩形を描き入れ、矩形を正確に 10 倍した図を並置して、全体と部分との対比が明確になる形で表示する。小区間を平行移動した図を連続的に表示することにより、近似の様子を動的に捉えることができる。

さらに、誤差の比率に着目すると、ギブス現象に対応する小区間の誤差が他の小区間に比して圧倒的に大きく、今回の小区間の取り方では 99% を占めていることが分かる。

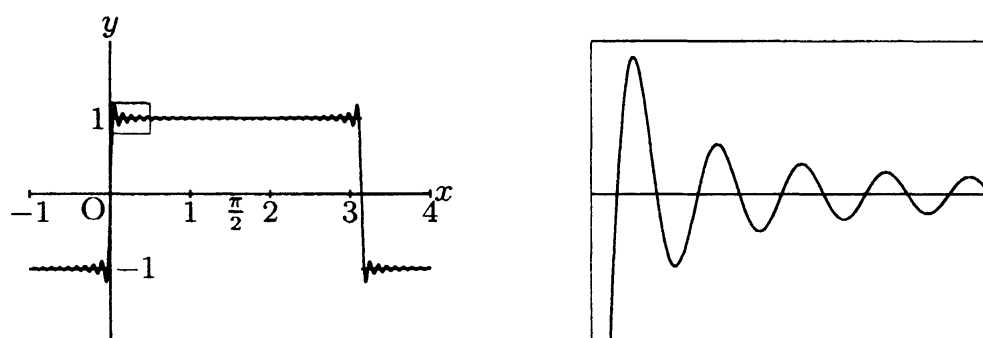


図 2.2.1: $0 < x < 0.5$ における誤差の比率 = 24.757%

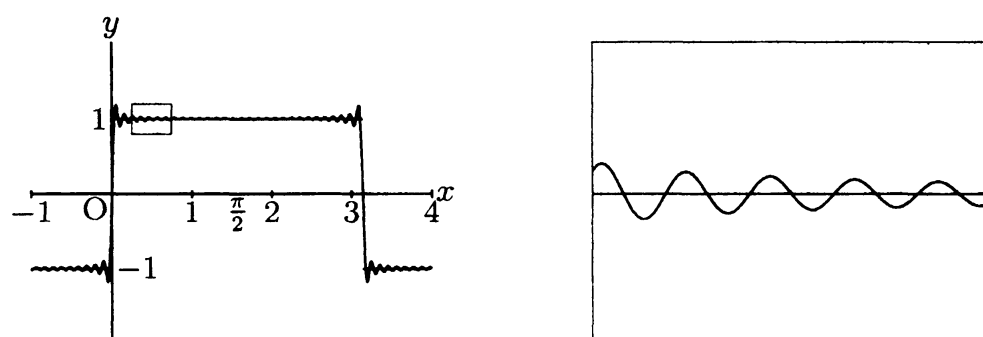


図 2.2.2: $0.25 < x < 0.75$ における誤差の比率 = 0.395%

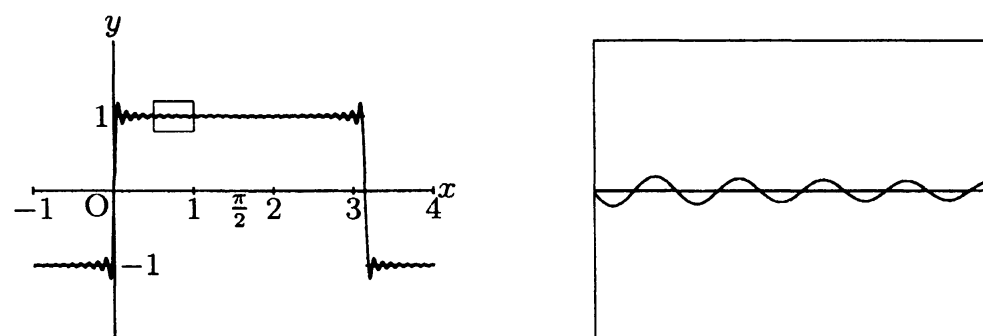


図 2.2.3: $0.5 < x < 1$ における誤差の比率 = 0.159%

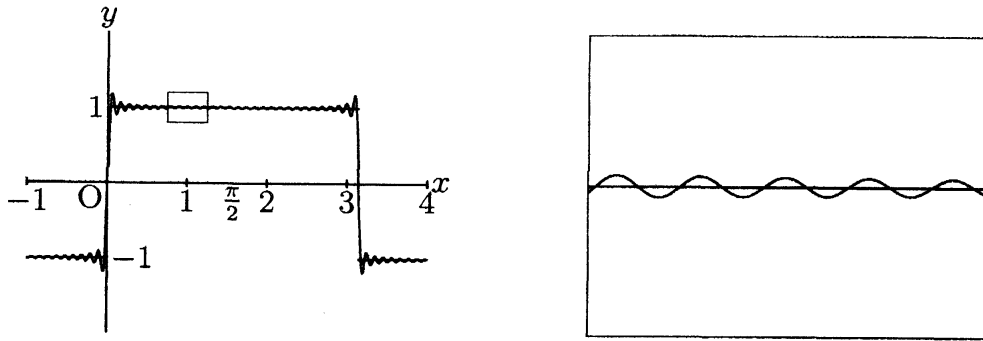


図 2.2.4: $0.75 < x < 1.25$ における誤差の比率 = 0.095%

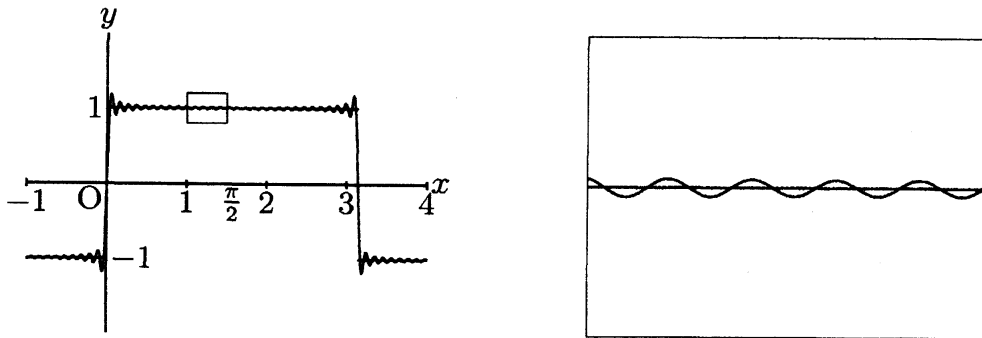


図 2.2.5: $1.00 < x < 1.50$ における誤差の比率 = 0.074%

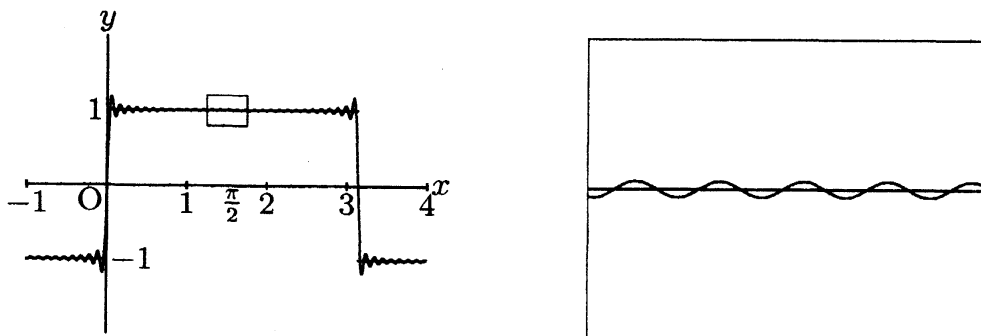


図 2.2.6: $1.25 < x < 1.75$ における誤差の比率 = 0.069%

2.3 着目範囲は一定で項数を変化させる場合

第 2.3 節では、着目範囲は $0.02 < x < 0.52$ に固定し、部分和の項数を $n = 20, 40, 60, 80, 100, 120$ と変化させる。

部分和の項数 n が 60 を越えたあたりから、全体図の方はほとんど変化が見られなくなるが、拡大図の方に目を向けると、ギブス現象による大きな誤差の波が n の増加に応じて、依然として着目範囲の外へ去り続けていることがはっきりとわかる。

さらに、平均 2 乗誤差の数値に着目する。部分和の項数 n の第 2 項目以降は初項の整数倍になっている。この倍率は平均 2 乗誤差に反映されており、 $E(40, [-\pi, \pi])$, $E(60, [-\pi, \pi])$, $E(80, [-\pi, \pi])$, \dots はそれぞれ $E(20, [-\pi, \pi])$ の $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, \dots となっている。平均 2

乗誤差に関するこの性質は、理論的に期待されるものとよく合致している。

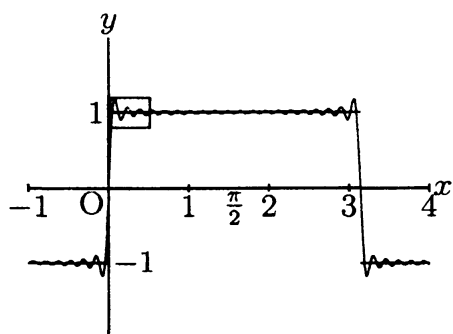
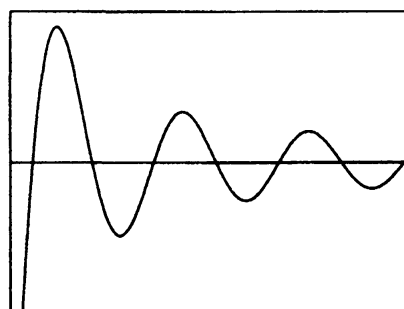


図 2.3.1: 平均 2 乗誤差 = 0.0636



部分誤差の比率 = 6.344%

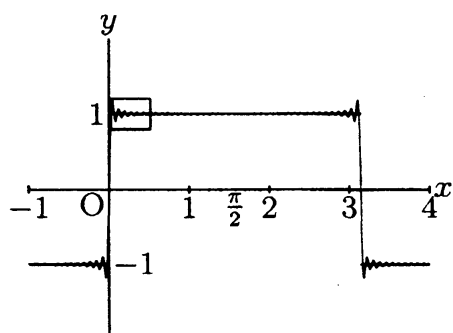
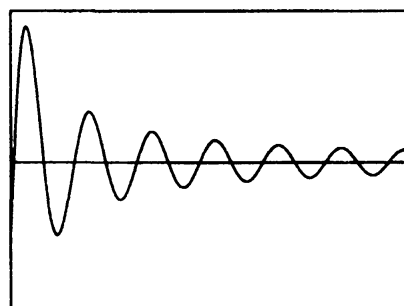


図 2.3.2: 平均 2 乗誤差 = 0.0318



部分誤差の比率 = 3.285%

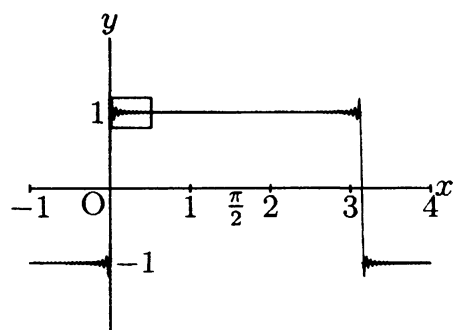
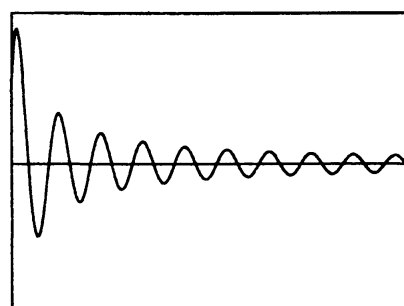


図 2.3.3: 平均 2 乗誤差 = 0.0212



部分誤差の比率 = 3.192%

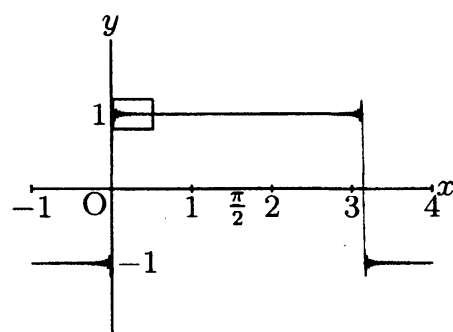
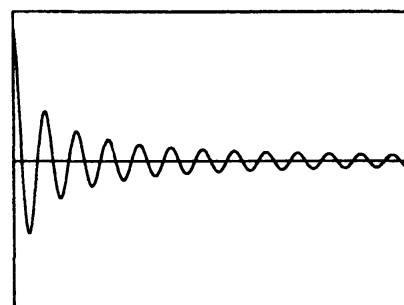


図 2.3.4: 平均 2 乗誤差 = 0.0159



部分誤差の比率 = 2.407%

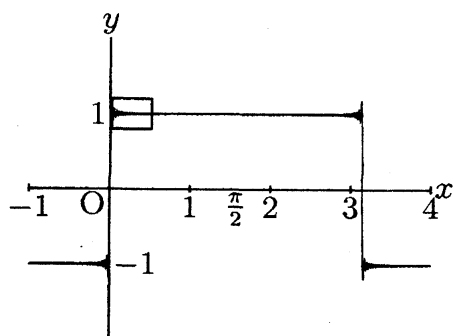
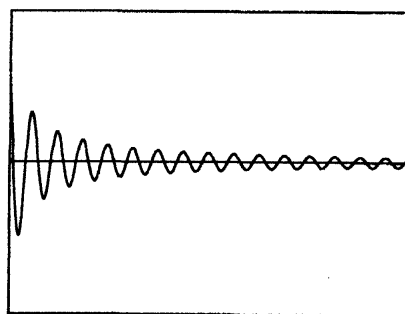


図 2.3.5: 平均 2 乗誤差 = 0.0127



部分誤差の比率 = 1.648%

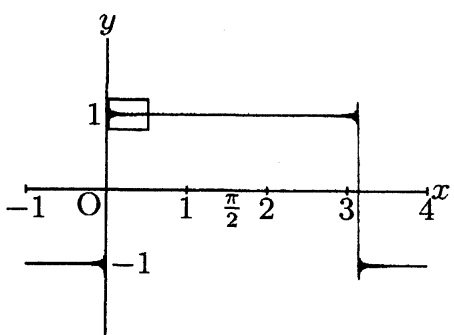
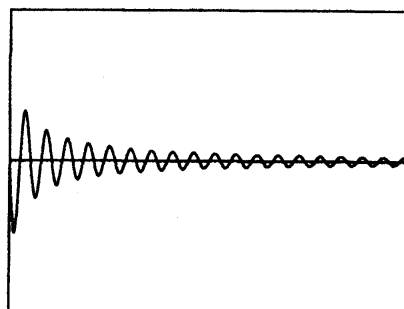


図 2.3.6: 平均 2 乗誤差 = 0.0106



部分誤差の比率 = 1.489%

3 テイラー級数に関する教材作成例

本章の目的は関数のテイラー近似を初めて学ぶ学生のために、テイラー近似のもつ特徴を直感的にかつ数学的概念が明確になる形で提示することである。

ここでは代表的な 4 つの関数 $\sin x$, e^x , $\frac{1}{1+x}$, $\log(1+x)$ を扱う。これらはテイラー近似を扱う上で最も基本的な関数であるが、ここで扱う内容には次に示す特徴がある。

まず三角関数 $\sin x$ を用いて、テイラー近似の項数を増やすことによって

- (1) 十分に良い近似ができる範囲が広がってゆくこと
- (2) 近似精度が良くなってゆくこと

の 2 点を示す。一般にテイラー近似では項数を増やすことによって (1), (2) は同時に実現されるのであるが、2 つの性質を分離し異なった図を用いて説明することにより、その意味をより深くより確実に定着させることができる。

指数関数 e^x ではさらに $x > 0$ の部分と $x < 0$ の部分での近似の様子が異なっていることを示す。分数関数と対数関数では収束半径の概念が付け加わるが、分数関数 $\frac{1}{1+x}$ では $x \geq 1$ において収束しないことを対数関数より初等的に理解することができる。

3.1 作成教材について

第 3 章では前章で述べた KETpic による作図の特徴に加えて、さらに次の特徴を有効に用いた教材例を提示する。

1. グラフ中の任意の位置に \LaTeX の本文中と同じ書体の文字列を書き込むことができる.
2. CAS を用いているので, 方程式の数値解を手軽に求めることができ, 図形作成作業を中断することなく円滑に, それらのデータを利用することができる.

関数 $f(x)$ に対するテイラー近似 (以下の教材ではマクローリン近似を扱う) の一般項を $s_n(x)$, 近似誤差を $E_n(x)$ とする.

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad E_n(x) = s_n(x) - f(x)$$

近似式の項数 n の増加に伴って近似可能範囲が拡大してゆく様子を直感的に捉えるために, 近似誤差 ε を与えて (例えば $\varepsilon = 0.1$ とする) 次の方程式の数値解を求める.

$$|E_n(x)| = |s_n(x) - f(x)| = \varepsilon$$

以下の教材例では $|E_n(x)| \leq \varepsilon$ となる範囲 $\alpha \leq x \leq \beta$ を明示するために, y 軸に平行で点 $(\alpha, 0)$ または点 $(\beta, 0)$ を通る線分を 2 辺とする矩形を用いた. y 軸に平行な各辺は 2 つのグラフ $y = f(x)$, $y = s_n(x)$ とそれぞれ点 P, Q で交わるように描かれており, 線分 PQ の長さを測ることによって $x = \alpha$ または $x = \beta$ における誤差の大きさを知ることができる.

一般に方程式の数値解を求めるには, 例えばニュートン法のプログラム等を用いる必要があり, 図形描画作業を一時中断してデータを求めなければならないが, CAS を用いると方程式の数値解はひとつの組み込み関数を用いて (例えば Maple ならば `fsolve` 関数) 直ちに得られるので, 数値解を求める作業に煩わされることなく図形描画に専念することができる.

3.2 $f(x) = \sin x$ のテイラー近似

3.2.1 拡大する近似可能範囲

図 3.2.1 のグラフ (1)~(8) は $f(x) = \sin x$ に対するテイラー近似式のグラフを表しており, 具体的には以下の近似等式の右辺の多項式で表わされる (6 番目と 7 番目は省略している).

$$(1) \sin x \doteq x \quad (2) \sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} \quad (3) \sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad (4) \sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$(5) \sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \quad (8) \sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!}$$

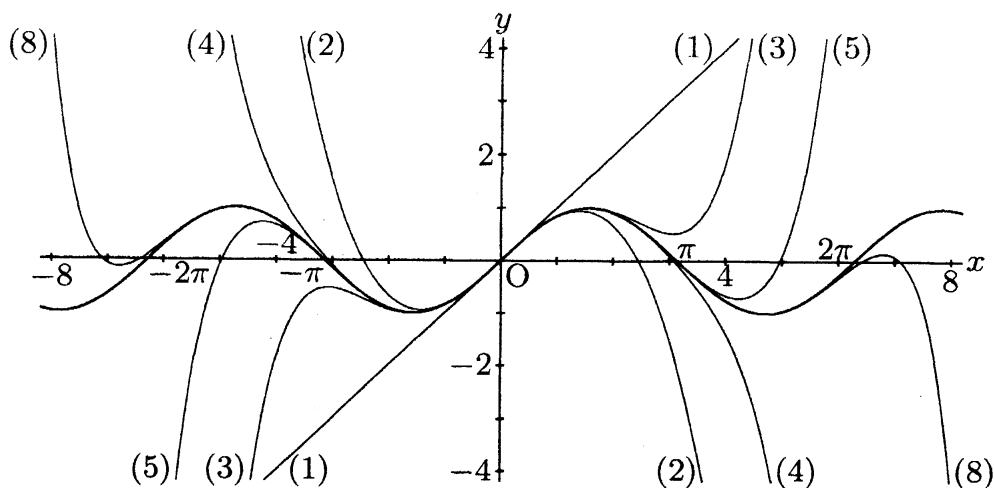


図 3.2.1 : $y = \sin x$ とテイラー近似のグラフ

$f(x) = \sin x$ に対するテイラー近似の一般項を $s_n(x)$, 近似誤差を $E_n(x)$ とする.

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad E_n(x) = s_n(x) - \sin x$$

図 3.2.2～図 3.2.7 は $n = 1 \sim 8$ それぞれに対して誤差の絶対値が 0.1 以下になる範囲, すなわち $|E_n(x)| \leq 0.1$ となる範囲を長方形を用いて表わしている.

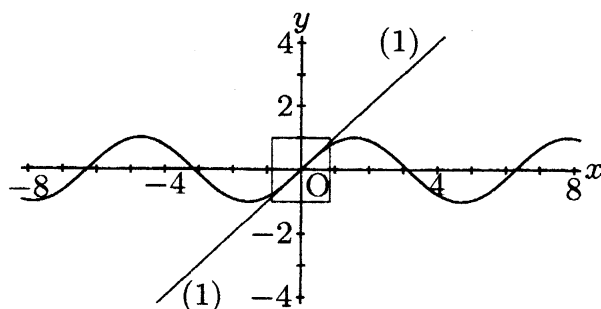


図 3.2.2 : $n = 1$

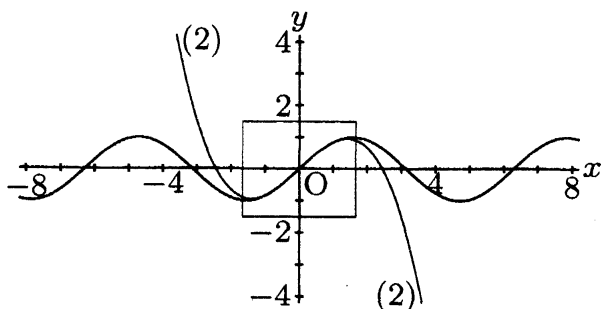


図 3.2.3 : $n = 2$

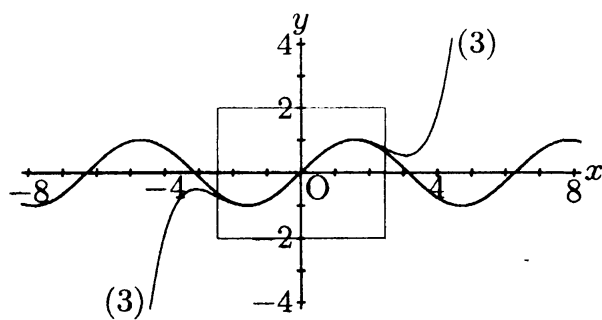
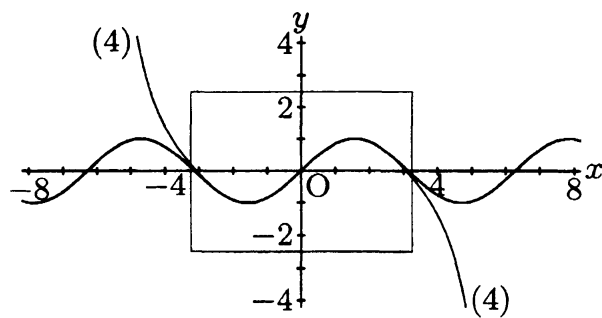
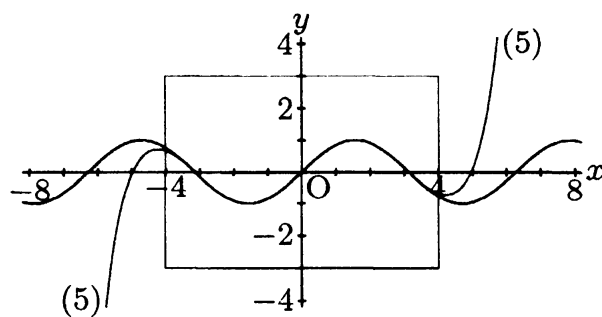
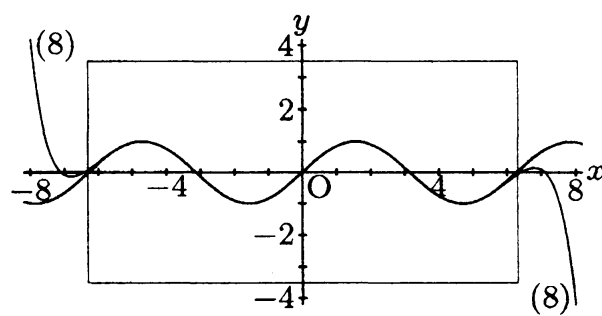
図 3.2.4 : $n = 3$ 図 3.2.5 : $n = 4$ 図 3.2.6 : $n = 5$ 図 3.2.7 : $n = 8$

図 3.2.2～図 3.2.7 をすべてまとめたものが図 3.2.8 である。

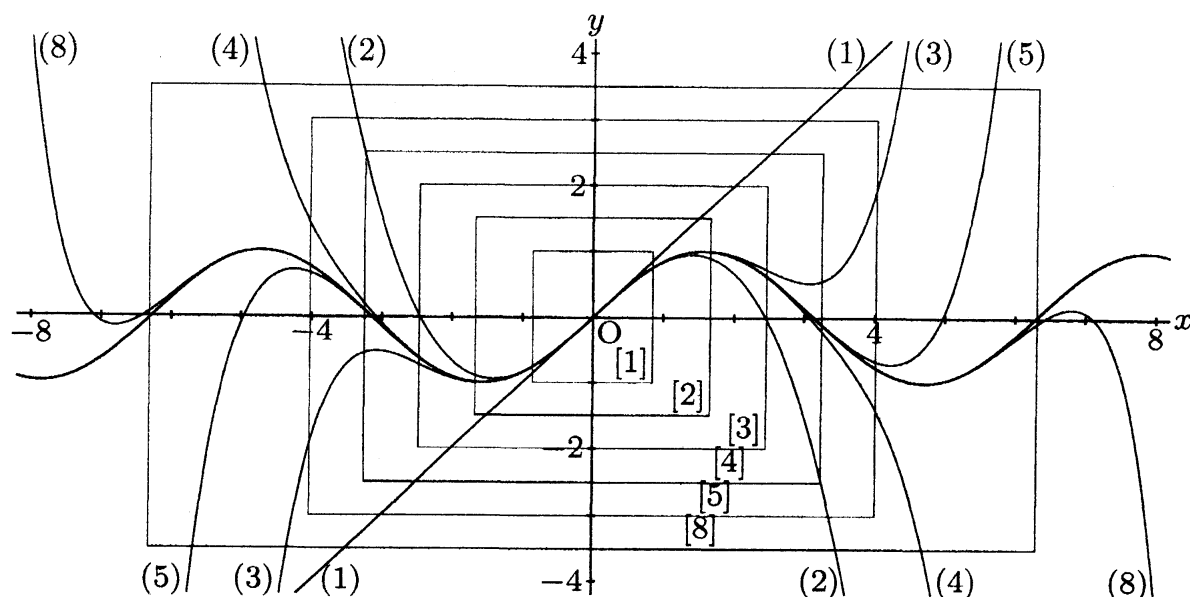


図 3.2.8 : $y = \sin x$ と近似誤差 0.1 以下の範囲

(1)～(8) の各近似に対して誤差の絶対値が 0.1 以下になる x の範囲を $|x| \leq x_k$ ($k = 1, \dots, 8$) とすれば, 各 x_k の値と隣り合う値の差 $x_k - x_{k-1}$ はそれぞれ次のようになる.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	0.854	1.665	2.462	3.245	4.019	4.787	5.550	6.309
$x_k - x_{k-1}$		0.812	0.796	0.783	0.774	0.768	0.763	0.760

表 3.2.9 : 近似誤差 0.1 を与える x の値

表 3.2.9 によれば, $k = 2, 3, 4$ のあたりでは $x_k - x_{k-1}$ の値はある程度減少しているが, k の値がそれ以上になると減少の程度が非常に小さくなることが分かる. $f(x) = \sin x$ に対するテイラー展開の収束半径が無限大であることは図 3.2.8 から直感的に想像できるが, 表の数値データからも強い示唆が得られる.

3.2.2 近似精度の向上

テイラー近似の特徴として, 近似多項式の項数を増やすことによって近似可能範囲の拡大と近似精度の向上が同時に起るが, 本節では図 3.2.1 の点 $(2.5, \sin(2.5))$ 付近の 10 倍拡大図を用いて, 近似精度が良くなってゆく様子を確認する.

さらに本節では正確に出力された図を用いて誤差の測定を行い, 体験を通して数学的概念を理解するための一つの試みを提示する. KETpic による挿図教材のこのような利用方法は, 本節以外の部分でも基本的に可能であるが, 最適な利用のためには工夫が必要である.

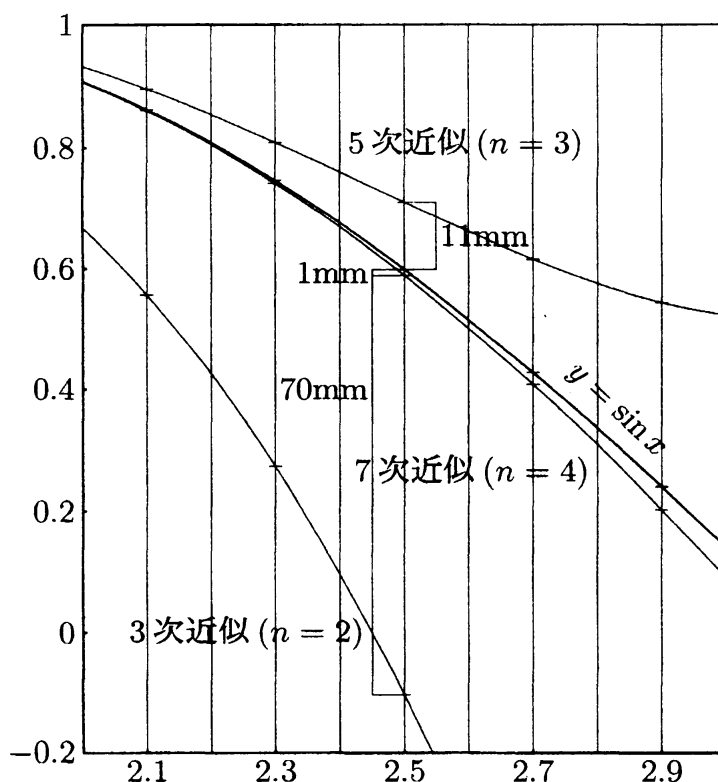


図 3.2.10 : 点 $(2.5, \sin(2.5))$ 付近の 10 倍拡大図 : $1\text{cm}=0.1$

図 3.2.10 は 1cm が 0.1 に対応するように描かれている。KETpic の描画精度は非常に高いので、 n 項近似の誤差 $E(n, x)$ は $y = \sin x$ のグラフとの y 軸方向距離を測ることによって求めることができる。例えば図中には $x = 2.5$ において測定した長さが記入されているが、これらの値から

$$E(2, 2.5) \doteq -0.7, \quad E(3, 2.5) \doteq 0.11 \quad E(4, 2.5) \doteq -0.01$$

であることが分かる。 $x = 2.3$ および $x = 2.7$ の場合に同様な作業を行い、表 3.2.11 を作成する（長さの計測から表の作成までの一連の作業は学生に行わせる）。

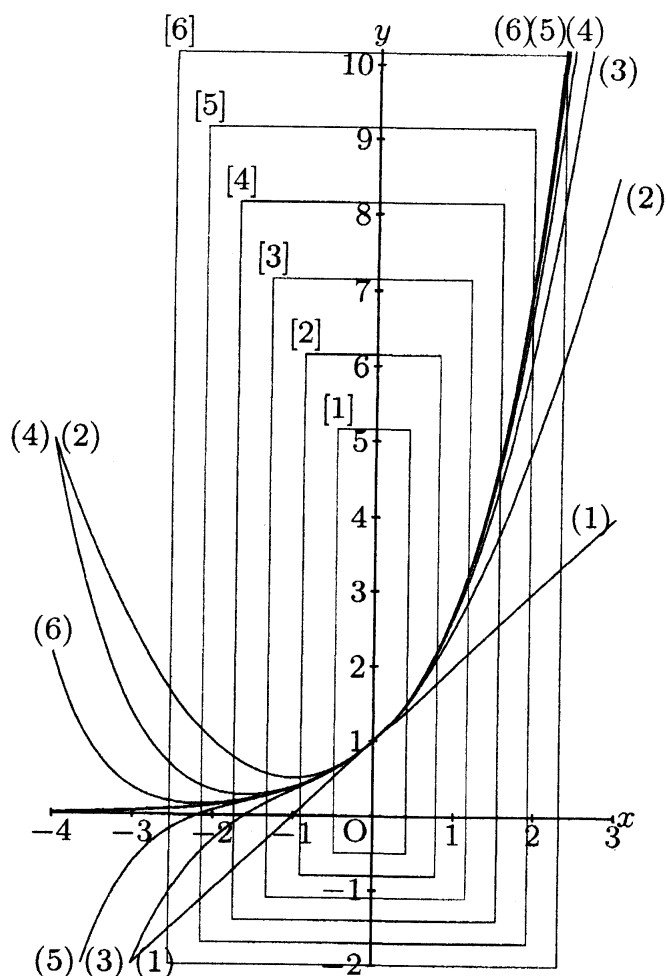
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$x = 2.3$	0.88 (0.883)	0.92 (0.930)	1.01 (0.953)
$x = 2.5$	0.86 (0.863)	0.91 (0.918)	0.95 (0.945)
$x = 2.7$	(0.843)	0.89 (0.905)	0.95 (0.937)

(括弧内は計算値)

表 3.2.11 : $(-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} E(n, x)$ の近似値

$x = 2.3$, $n = 4$ に対応する表の値は $E(4, 2.3)$ に対する測定誤差の影響で 1 より大きくなっているが、理論的には有り得ない。この表から、 n が大きいときの誤差 $E(n, x)$ はほぼ $\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ に等しくなることがわかる。

3.3 $f(x) = e^x$ のテイラー近似



$$(1) \ n = 1 : e^x \approx 1 + x$$

$$(2) \ n = 2 : e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$(3) \ n = 3 : e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$(4) \ n = 4 : e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$(5) \ n = 5 : \\ e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$(6) \ n = 6 : \\ e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

図 3.3.1 : e^x のテイラー近似と誤差 0.1 の範囲

$f(x) = e^x$ のマクローリン展開は負の x に対して交代級数であり、正の x に対して正項級数である。従って x が正の場合と負の場合とでは誤差の大きさに変化が生じる。

図 3.3.1 は誤差の絶対値が 0.1 以下になる範囲を表わしている。(1)～(6) の各近似に対して誤差の絶対値が 0.1 以下になる x の範囲を $a_k < x < b_k$ ($k = 1, \dots, 6$) とすれば、各 a_k , b_k の値と隣り合う値の差 $a_k - a_{k-1}$, $b_k - b_{k-1}$ はそれぞれ次のようになる。

k	1	2	3	4	5	6
a_k	-0.483	-0.905	-1.323	-1.732	-2.135	-2.533
$a_k - a_{k-1}$		-0.422	-0.417	-0.409	-0.403	-0.398
b_k	0.416	0.787	1.168	1.553	1.937	2.321
$b_k - b_{k-1}$		0.371	0.382	0.384	0.385	0.384

表 3.3.2 : 近似誤差が 0.1 の範囲

図 3.3.1 または表 3.3.2 より, 同じ誤差量に対して $x > 0$ の部分よりも $x < 0$ の部分の方がより広い範囲で近似可能であることがわかる.

3.4 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ のテイラー近似

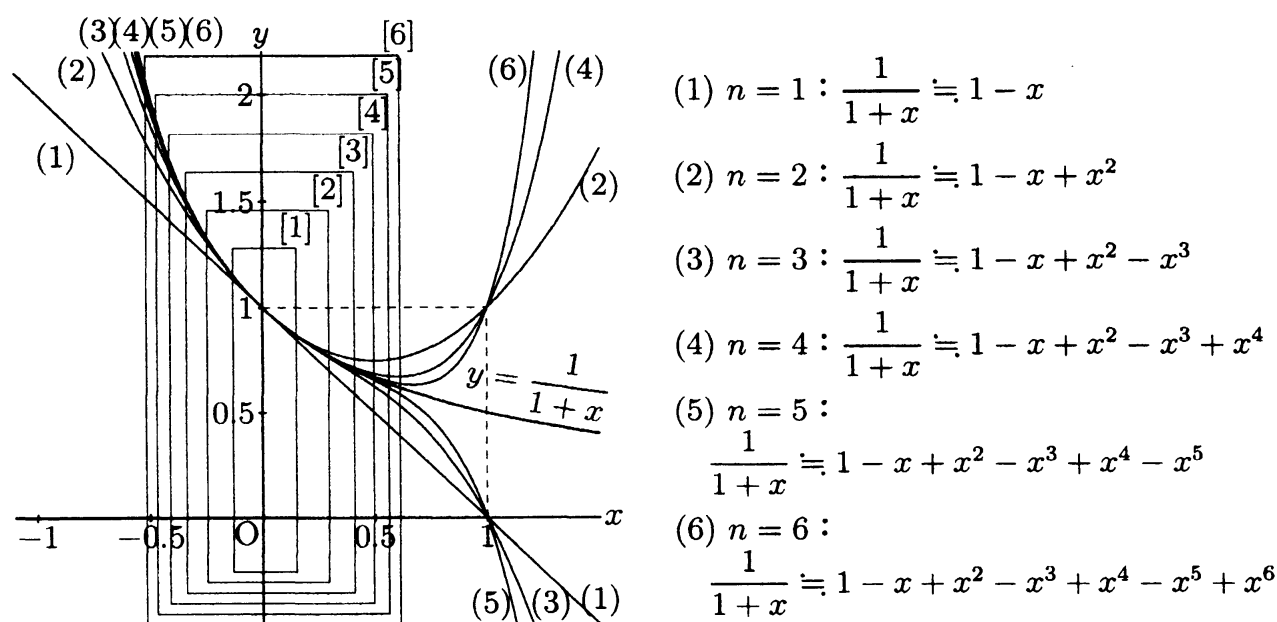


図 3.4.1 : $\frac{1}{1+x}$ のテイラー近似と誤差 0.02 の範囲

関数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ の場合は n 次近似による誤差は次の等式で表わされる.

$$\text{誤差} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

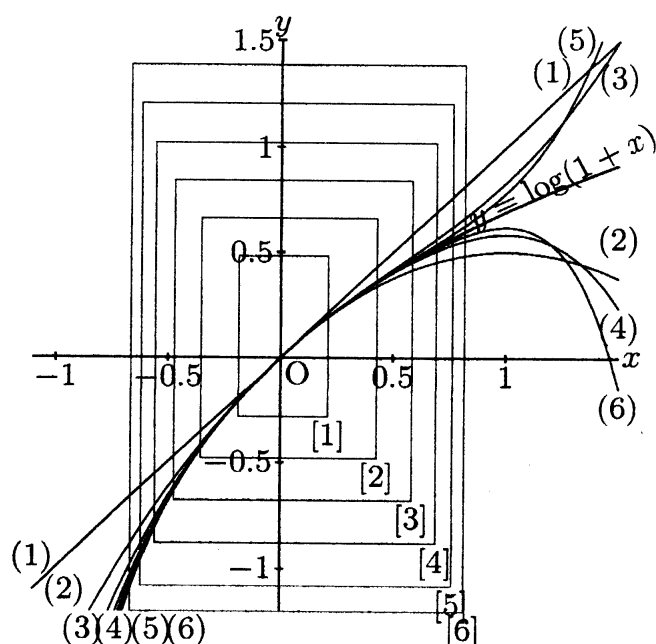
図 3.4.1 は誤差の絶対値が 0.02 以下になる範囲を表わしている. 誤差に対応する範囲の表は次のようになる.

k	1	2	3	4	5	6
a_k	-0.132	-0.247	-0.339	-0.411	-0.469	-0.516
$a_k - a_{k-1}$		-0.115	-0.092	-0.072	-0.058	-0.047
b_k	0.152	0.296	0.410	0.496	0.561	0.612
$b_k - b_{k-1}$		0.144	0.114	0.086	0.066	0.051

表 3.4.2 : 近似誤差が 0.02 の範囲

図 3.4.1 または表 3.4.2 より, $x > 0$ の部分と $x < 0$ の部分での近似可能範囲の違いが e^x の場合よりもより明瞭に現れている. さらに, $x \geq 1$ の部分では近似精度が非常に悪いことが明らかである.

3.5 $f(x) = \log(1+x)$ のテイラー近似



$$(1) \ n = 1 : \log(1+x) \doteq x$$

$$(2) \ n = 2 : \log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$$

$$(3) \ n = 3 : \log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$(4) \ n = 4 : \log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$(5) \ n = 5 : \log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

$$(6) \ n = 6 : \log(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$$

図 3.5.1 : $\log(1+x)$ のテイラー近似と誤差 0.02 の範囲

関数 $f(x) = \log(1+x)$ の場合は n 次近似による誤差は次の等式で表わされる。

$$\text{誤差} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} - \log(1+x) = (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

図 3.5.1 は誤差の絶対値が 0.02 以下になる範囲を表わしている。誤差に対応する範囲の表は次のようになる。

k	1	2	3	4	5	6
a_k	-0.187	-0.352	-0.471	-0.555	-0.617	-0.664
$a_k - a_{k-1}$		-0.166	-0.118	-0.084	-0.062	-0.047
b_k	0.214	0.429	0.585	0.690	0.763	0.815
$b_k - b_{k-1}$		0.215	0.156	0.106	0.073	0.052

表 3.5.2 : 近似誤差が 0.02 の範囲

4 まとめと今後の課題

KETpic は \TeX によって教科書や授業での配布教材を作成する必要から生まれ、ユーザーの要求に応える形でさまざまな改良と機能拡張が行われてきた。単色線画を基本としていて大量印刷に向く描画図形は、学生の手元に残して反復使用させることにより数学的な概念を定着させる用途に最適である。KETpic により正確に描画された図形は、数学的概念の正確な理解という点から重要であるが、さらに、図形の実測により体験を

通して概念の獲得に至るという教育的に重要な側面に寄与することが可能である。本稿に示した例に於いてもこのような視点から教材を利用することができる。

KETpic のもつ特徴の多くが CAS の利用に依存しているのであるが、図の作成作業が CAS の中で行われることによって、CAS のもつ利点が明らかになる。CAS は数値積分や方程式の数値解を与える関数をはじめとして、非常に豊富で手軽に利用できる関数群を含むので、図形描画に必要なデータを描画作業を中断することなく得ることができる。ユーザー関数が自由に定義できることもスムーズな描画作業には有利である。図形描画には多くの修正作業が必要であるが、インタープリターとしての働きが修正作業を容易にしている。

本研究における教材作成の過程を通して次第に明らかになってきたことは、数学的概念の形成を助ける挿図教材には 1 つか 2 つのなるべく少ない内容を盛り込むことが重要であり、提示しようとするテーマを内容に応じて分解して適切な作図を行う必要があるということである。今後もより高い教育効果が得られる挿図教材とは何かについて様々な題材を扱う中で追求してゆくことが課題であるが、特に直観的理解に困難を伴う空間内の曲線や曲面などの立体図形の作成において、内容の分解と適切な提示という課題を実現する具体的な教材を作成することが必要である。

謝辞

本研究は、科学研究費補助金基盤研究 C（課題番号 20500818）の補助を受けています。

参考文献

- [1] 高遠節夫, 阿部孝之, 泉源, 金子真隆, 北原清志, 関口昌由, 深澤謙次, 山下哲: 授業効果を高める挿図教材の作成, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.15, No.1, pp. 109–118, 2008.
- [2] M. Sekiguchi, Takayuki Abe, Hajime Izumi, M. Kaneko, S. Yamashita, Kenji Fukazawa, Kiyoshi Kitahara, S. Takato: Monochrome Line Drawings of 3D Objects due to the Programmability of KETpic, 2008 International Conference on Computational Sciences and its Applications, pp. 277–283, IEEE 2008.
- [3] M. Kaneko, Hajime Izumi, Kiyoshi Kitahara, Takayuki Abe, Kenji Fukazawa, M. Sekiguchi, Y. Tadokoro, S. Yamashita, S. Takato: A Simple Method of the TEX Surface Drawing Suitable for Teaching Materials with the Aid of CAS, Lecture Notes in Computer Science 5102, pp. 35–45, Springer-Verlag 2008.
- [4] M. Kaneko, T. Abe, K. Fukazawa, M. Sekiguchi, Y. Tadokoro, S. Yamashita, S. Takato: CAS-aided Visualization in L^AT_EX Documents for Mathematical Education

– Achievements of KETpic – to appear in Teaching Mathematics and Computer Science, Vol. VI, Issue II, 2008.

- [5] 山下哲, 阿部孝之, 泉源, 金子真隆, 関口昌由, 深澤謙次, 北原清志, 高遠節夫: 挿図入り印刷配付教材作成ツールの開発 – 木更津高専数学教員の挑戦 – 日本高専学会誌 第13巻 第3号 No.51 pp. 47–52, 2008
- [6] Y. Tadokoro, T. Abe, M. Kaneko, M. Sekiguchi, K. Fukazawa, S. Yamashita, S. Takato: A LATEX plotting software KETpic and its development, Proceedings of the 12th Asian Technology Conference in Mathematics, 2007.
- [7] 山下哲, 阿部孝之, 金子真隆, 関口昌由, 田所勇樹, 深澤謙次, 高遠節夫: KETpicの改良と教育利用, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.14, No.1, pp. 51–60, 2007.
- [8] M. Sekiguchi, M. Kaneko, Y. Tadokoro, S. Yamashita, S. Takato: A New Application of CAS to L^AT_EX Plottings, ICCS 2007, Lecture Notes in Computer Science 4488, pp. 178–185, 2007, Springer-Verlag 2007.
- [9] 北原清志, 高遠節夫: KETpicを用いた数値データの図形表示について, 第26回数理学講演会講演論文集, No.26, pp. 51–52, 2007
- [10] 山下哲, 関口昌由, 金子真隆, 田所勇樹, 高遠節夫: 図を活用した印刷教材の作成 – 数式処理ソフトとT_EXによるKETpicの開発 –, 日本高専学会誌 第1回論文特集号, 第12巻 第2号, pp. 81–86, 2007.
- [11] M. Sekiguchi, S. Yamashita, S. Takato: Development of a Maple Macro Package Suitable for Drawing Fine T_EX-Pictures, Lecture Notes in Computer Science 4151, pp. 24–34, Springer-Verlag, 2006.
- [12] 山下哲, 関口昌由, 高遠節夫: Mapleによる図形描画用T_EXファイルの作成について, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.13, No.1, pp. 31–40, 2006